

广义光滑模和广义凸性模的性质

赵 亮, 於 杨

(哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080)

摘 要: 基于广义光滑模的定义, 研究了 Banach 空间下的广义光滑模与 t 之间的关系, 证明了一致非方的三个等价条件以及关于广义光滑模的四个等价命题。此外证明了 Banach 空间和超自反的 Banach 空间分别满足 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_X^\alpha(t)}{t} < \frac{1}{2}$ 和 $\rho_X^\alpha(t) < \alpha + \frac{3}{2}t\omega(x) - 1, t \cdot \omega(X) \leq 1$ 的条件下具有一致正规结构, $\rho_X^\alpha(t)$ 和 $\omega(X)$ 分别为广义光滑模和弱正交系数。最后给出了 $\forall x, y \in X$ 当 $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$ 时关于广义凸性模的一个不等式。

关键词: 广义光滑模; 广义凸性模; 一致非方; 一致正规结构

DOI: 10.15938/j.jhust.2020.01.022

中图分类号: O177.7 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2020)01-0144-05

Properties of Generalized Modulus of Smoothness and Generalized Modulus of Convexity

ZHAO Liang, YU Yang

(School of Sciences, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Based on the definitions of generalized modulus of smoothness, the relation between generalized modulus of smoothness and t in the Banach spaces is studied, which proves three equivalent conditions of uniform normal structure and four equivalent propositions of generalized modulus of smoothness. In addition, which is proved that the Banach space and the super reflexive Banach space satisfy conditions of $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_X^\alpha(t)}{t} < \frac{1}{2}$ and $\rho_X^\alpha(t) < \alpha + \frac{3}{2}t\omega(x) - 1, t \cdot \omega(X) \leq 1$ have uniform normal structure. $\rho_X^\alpha(t)$ and $\omega(X)$ are generalized modulus of smoothness and weak orthogonal coefficient respectively. Finally, which gives an inequality about the generalized convex modulus when $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2, \forall x, y \in X$.

Keywords: generalized modulus of smoothness; generalized modulus of convexity; uniformly nonsquare; uniform normal structure

收稿日期: 2018-04-10

基金项目: 国家自然科学基金(11571085); 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12541145)。

作者简介: 赵 亮(1970—), 男, 教授, E-mail: zhaoliang@hrbust.edu.cn.

通信作者: 於 杨(1994—), 男, 硕士研究生。

0 引言

作为近代泛函分析的重要分支, Banach 空间几何理论的研究一直备受数学研究者们的青睐。由于 Banach 空间几何理论在不动点理论、控制论、鞅论、逼近论等诸多领域有广泛的应用, 因此 Banach 空间几何理论的研究具有重要意义。1936 年, J. Clarkson 刻画了一致凸性的凸性模, 它们在最佳逼近理论以及不动点理论中有着重要的应用, 1965 年, W. A. Kirk 证明了具有正规结构自反的 Banach 空间具有不动点性质。光滑性是作为凸性的对偶性质提出来的, 广义光滑模的几何意义在于描述一个 Banach 空间的光滑性, 与光滑模比较起来, 在对具体的 Banach 空间的光滑性进行分析时, 广义光滑模中可选择适当的 α 进行计算分析。

在对文 [1-20] 中关于凸性模、光滑模等的研究方法进行分析后, 本文基于广义光滑模和广义凸性模的定义和性质, 对其做了进一步研究, 得到了广义光滑模在 Banach 空间与 t 之间的关系, 非平凡的 Banach 空间几个等价条件, 探究了 Banach 空间具有一致正规结构用广义光滑模刻画的充分条件以及超自反的 Banach 空间满足 $\rho_X^\alpha(t) < \alpha + \frac{3}{2}t\omega(x) - 1$, $t \cdot \omega(X) \leq 1$ 的条件下具有一致正规结构。最后得到了关于广义凸性模的一个不等式。

1 基本定义

在本文中, 以 X 表示 Banach 空间, 以 X^* 表示 X 的对偶空间并且用 $S(X)$ 来表示 X 的单位球面, 下面给出与本文相关的定义以及定理。

定义 1 [1] 函数 $\delta_X: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$,

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \frac{x+y}{2} : x, y \in S(X), \|x-y\| = \varepsilon \right\}$$

被称为凸性模。称常数 $\varepsilon_0(X) = \sup \{ \varepsilon \geq 0 : \delta_X(\varepsilon) = 0 \}$ 为凸性特征。

定义 2 [1] 函数

$$\delta_X^\alpha(\varepsilon) = \inf \{ 1 - \|\alpha x + (1-\alpha)y\| : x, y \in S(X), \|x-y\| = \varepsilon \}, \alpha \in (0, 1)$$

被称为是 Banach 空间 X 的广义凸性模。称常数 $\varepsilon_0^\alpha(X) = \sup \{ \varepsilon \geq 0 : \delta_X^\alpha(\varepsilon) = 0 \}$ 为广义凸性特征。

定义 3 [1] 函数

$$\rho_X(t) = \sup \left\{ \frac{\|x+ty\| + \|x-ty\|}{2} - 1 : x, y \in S(X) \right\}$$

被称为是 Banach 空间 X 的光滑模。

定义 4 [1] 函数

$$\rho_X^\alpha(t) = \sup \left\{ \left\| \alpha x + \frac{t}{2}y \right\| + \left\| (1-\alpha)x - \frac{t}{2}y \right\| - 1 : x, y \in S(X) \right\},$$

$\alpha \in (0, 1)$

被称为是广义光滑模。

定义 5 [1] Banach 空间 X 称为是一致非方的是

指存在 $\delta > 0$, 当 $x, y \in S(X)$, 有 $\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta$ 或者

$$\left\| \frac{x-y}{2} \right\| < 1 - \delta.$$

定义 6 [1] Banach 空间 X 具有一致正规结构是指对任意的有界凸子集 $K \subset X$ 且 $\text{diam}(K) > 0$, 存在常数 $0 < c < 1$, 使得 $r(K) \leq c \text{diam}(K)$ 。

定义 7 [1] 常数

$$\omega(X) = \sup \{ \lambda : \lambda \liminf_n \|x_n + x\| \leq \liminf_n \|x_n$$

$$- x\| : x_n \xrightarrow{\omega} 0, x \in X \}$$

被称为弱正交系数。

引理 1 [1] 设 $\alpha \leq 2$ 则 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_X^\alpha}{t} < \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \varepsilon_0^\alpha(X^*)$

$< \alpha$ 。

引理 2 [1] 若 $\tilde{X}$ 具有正规结构, 则 X 具有一致正规结构。

引理 3 [1] 设 X 为 Banach 空间, 集合 $B \subset X$ 不具有正规结构, 当且仅当存在有界序列 $\{x_n\} \subset B$ 满足:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \text{diam}(\{x_n\}) > 0, \forall x \in \overline{\text{co}}(\{x_n\}).$$

引理 4 [1] 假如 Banach 空间 X 不具有弱正规结构, 那么对 $0 < \varepsilon < 1$, 存在充分大的 n 和弱收敛于 0 的序列 $\{x_n\} \subset S_X$ 满足:

$$1) \|x_n + x_1\| \leq \frac{1+\varepsilon}{\omega(X) - \varepsilon};$$

$$2) \|x_n - x_1\| \leq 1 + \varepsilon.$$

引理 5 [1] 假如 Banach 空间 X 不具有弱正规结构, 那么对 $0 < \varepsilon < 1$, 存在充分大的 n 和弱收敛于 0 的序列 $\{x_n\} \subset S_X$ 满足:

$$1 - \varepsilon < \|x_{n+1} - x\| < 1 + \varepsilon, x \in \overline{\text{co}}(x_n)_{n=1}^\infty.$$

命题 1 [1] 设 X 是非平凡的 Banach 空间, 则有

$$2\alpha\delta(\varepsilon) \leq \delta^\alpha(\varepsilon) \leq 2(1-\alpha)\delta(\varepsilon).$$

2 主要内容

定理 1 Banach 空间 X 中的广义光滑模或者

$\rho_X^\alpha(t) = t, \forall t > 0$ 成立, 或者 $\rho_X^\alpha(t) < t, \forall t > 0$ 成立。

证明: 假设 $\forall t_0 > 0$, 使得 $\rho_X^\alpha(t_0) \neq t_0$, 因为 $\rho_X^\alpha(t) \leq t$ ^[1], 所以 $\rho_X^\alpha(t) < t, \forall t > 0$ 成立。

假设 $\exists t_0 > 0$, 使得 $\rho_X^\alpha(t_0) = t_0$, 因为 $\frac{\rho_X^\alpha(t)}{t}$ 是关于 t 的增函数, 并且有 $\rho_X^\alpha(t) \leq t$, 所以当 $t \geq t_0$ 时, 有 $1 = \frac{\rho_X^\alpha(t_0)}{t_0} \leq \frac{\rho_X^\alpha(t)}{t} \leq 1$, 所以有 $\rho_X^\alpha(t) = t$ 。当 $0 < t < t_0$, $\exists t_1 > t_0$, 假设 $\rho_X^\alpha(t) < t$, 根据 $\rho_X^\alpha(t)$ 的凸性, 我们有

$$t_0 = \rho_X^\alpha(t_0) = \rho_X^\alpha\left(\frac{t_0 - t}{t_1 - t}t_1 + \frac{t_1 - t_0}{t_1 - t}t\right) \leq$$

$$\frac{t_0 - t}{t_1 - t}\rho_X^\alpha(t_1) + \frac{t_1 - t_0}{t_1 - t}\rho_X^\alpha(t) <$$

$$\frac{t_0 - t}{t_1 - t}t_1 + \frac{t_1 - t_0}{t_1 - t}t = t_0,$$

故矛盾, 因此 $\rho_X^\alpha(t) = t, \forall t > 0$ 。

定理 2 设 X 是非平凡的 Banach 空间, 则下面的条件是等价的:

- 1) X 是一致非方的;
- 2) 存在 $\varepsilon \in (0, 2)$ 使得 $\delta_X^\alpha(\varepsilon) > 0$;
- 3) $\varepsilon_0^\alpha(X) < 2$;
- 4) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_{X^*}^\alpha(t)}{t} < 1$ 。

证明: 1) $\Leftrightarrow$ 2) 由 X 是一致非方的当且仅当存在 $\varepsilon \in (0, 2)$, 使得 $\delta_X(\varepsilon) > 0$, 又由命题 1 知 $\delta_X(\varepsilon) > 0$ 当且仅当 $\delta_X^\alpha(\varepsilon) > 0$, 得证。

2) $\Leftrightarrow$ 3) 由 $\delta_X^\alpha(\varepsilon)$ 是一个关于 ε 非降函数及 $\varepsilon_0^\alpha(X)$ 的定义显然可得。

- 3) $\Leftrightarrow$ 4) 利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_{X^*}^\alpha(t)}{t} = \frac{\varepsilon_0^\alpha(X)}{2}$ 可得到。

定理 3 设 X 是非平凡的 Banach 空间, 则下面的条件是等价的:

- 1) 存在 $t_0 > 0$, 使得 $\rho_X^\alpha(t_0) < t_0$;
- 2) 对于所有的 $t > 0, \rho_X^\alpha(t) < t$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_X^\alpha(t)}{t} < 1$;
- 4) $\varepsilon_0^\alpha(X^*) < 2$ 。

证明: 1) $\Leftrightarrow$ 2) 利用定理 1 的结果显然可得。

- 1) $\Leftrightarrow$ 3) 利用 $\frac{\rho_X^\alpha(t)}{t}$ 是一个递增的函数。

- 3) $\Leftrightarrow$ 4) 利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_X^\alpha(t)}{t} = \frac{\varepsilon_0^\alpha(X^*)}{2}$ 可得到。

定理 4 若 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_X^\alpha(t)}{t} < \frac{1}{2}$, 则 X 具有一致正规结构。

构。

证明: 由引理 1 知, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_X^\alpha(t)}{t} < \frac{1}{2}$ 蕴含 $\varepsilon_0^\alpha(X^*)$

< 1 , 所以 $\varepsilon_0(X^*) < 1$, 因此, X^* 是超自反的从而 X 也是超自反的。又由于 $\rho_X(\cdot) = \rho_{X^*}(\cdot)$, 以及引理 2, 故只需证 X 具有弱正规结构。

若 X 不具有弱正规结构, 则由引理 3 知, 存在有界序列 $\{x_n\} \subset B$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = \text{diam}(\{x_n\}) = c > 0, \forall x \in \overline{\text{co}}(\{x_n\}),$$

由于 X 是自反的, 不妨设 $x_n \xrightarrow{w} w$ 。令 $t \in [0, 1]$, 则

$$\left\| \alpha(x_n - x_m) + \frac{t(w - x_n)}{2} \right\| +$$

$$\left\| (1 - \alpha)(x_n - x_m) - \frac{t(w - x_n)}{2} \right\| \leq$$

$$\|x_n - x_m\| \left(1 + \rho_X^\alpha \frac{t \|w - x_m\|}{\|x_n - x_m\|} \right),$$

令 $n \rightarrow \infty$ 时, 则由上式知

$$\left\| \alpha(x_n - x_m) + \frac{t(w - x_m)}{2} \right\| \leq \|x_n - x_m\| + \|x_n - x_m\|$$

$$\left\| \rho_X^\alpha \frac{t \|w - x_m\|}{\|x_n - x_m\|} - (1 - \alpha) \|x_n - x_m\| - \right.$$

$$\left. \frac{t \|w - x_m\|}{2} \right\| \leq$$

$$\alpha \|w - x_m\| + \|w - x_m\| \rho_X^\alpha \frac{t \|w - x_m\|}{\|x_n - x_m\|} \leq$$

$$\|w - x_m\| \left(\alpha + \rho_X^\alpha \frac{t \|w - x_m\|}{\|x_n - x_m\|} \right),$$

又由于 $\{x_n\}$ 弱收敛于 w , 故

$$\left(\frac{t}{2} + \alpha \right) c \leq c(\alpha + \rho_X^\alpha(t)),$$

这表明 $\frac{t}{2} \leq \rho_X^\alpha(t)$, 因此, 可推知与 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\rho_X^\alpha(t)}{t} \geq \frac{1}{2}$ 矛盾。

定理 5 对于一个超自反的 Banach 空间 X , 如果 $\rho_X^\alpha(t) < \alpha + \frac{3}{2}t\omega(x) - 1$ 且 $t \cdot \omega(X) \leq 1$, 那么 X 有一致正规结构。

证明: 因为 X 是超自反的 Banach 空间, 故只需证明 X 具有弱正规结构即可。

假设 X 不具有弱正规结构, 因为 $t \cdot \omega(X) \leq 1$, 那么存在 x_1, x_n 满足引理 4 的结论, 对 $\forall 0 < \varepsilon < 1$, 令 $x = x_n - x_1, y = (\omega(X) - \varepsilon)(x_n + x_1)$, 那么有

$$\|x\| \leq 1 + \varepsilon, \|y\| \leq 1 + \varepsilon,$$

由引理 5 可以得到

$$\left\| x_n - \frac{\alpha - \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon)}{\alpha + \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon)} x_1 \right\| =$$

$$\left\| x_n - \left(\frac{\alpha - \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon)}{\alpha + \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon)} x_1 + \frac{t(\omega(x) - \varepsilon)}{\alpha + \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon)} \cdot 0 \right) \right\|$$

$$\geq 1 - \varepsilon,$$

所以有

$$\left\| \alpha x + \frac{t}{2} y \right\| =$$

$$\left\| \alpha(x_n - x_1) + \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon)(x_n + x_1) \right\| =$$

$$\left\| \left(\alpha + \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon) \right) x_n - \left(\alpha - \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon) \right) x_1 \right\| \geq$$

$$\left(\alpha + \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon) \right) \left\| x_n - \frac{\alpha - \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon)}{\alpha + \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon)} x_1 \right\| \geq$$

$$\left(\alpha + \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon) \right) (1 - \varepsilon)$$

$$\left\| (1 - \alpha)x - \frac{t}{2} y \right\| =$$

$$\left\| (1 - \alpha)(x_n - x_1) - \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon)(x_n + x_1) \right\| =$$

$$\left\| \left((1 - \alpha) - \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon) \right) x_n - \right.$$

$$\left. \left((1 - \alpha) + \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon) \right) x_1 \right\| \geq$$

$$\left((1 - \alpha) + \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon) \right) -$$

$$\left((1 - \alpha) - \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon) \right) \geq$$

$$t(\omega(x) - \varepsilon),$$

由广义光滑模的定义,可以得到

$$\rho_X^\alpha(t) \geq \left(\alpha + \frac{t}{2}(\omega(x) - \varepsilon) \right) (1 - \varepsilon) + t(\omega(x) - \varepsilon) - 1,$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则有

$$\rho_X^\alpha(t) \geq \alpha + \frac{3}{2} t \omega(x) - 1$$

与已知条件矛盾, 因此 X 具有弱正规结构, 故 X 具有一致正规结构。

定理 6 设 X 是一个 Banach 空间, 对任意的 $x, y \in X$, 若 $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$, 则 $\|x + y\|^2 < 4 - 2\delta_X^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right)$ 。

证明: 如果 $(\|x\| - \|y\|)^2 > 2\delta_X^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right)$,

则有

$$\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) - (\|x\| - \|y\|)^2 < 4 - 2\delta_X^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right)$$

显然成立。

不妨设 $\|x\| \geq \|y\|$, 且 $(\|x\| - \|y\|)^2 \leq 2\delta_X^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right)$, 又因为 Hilbert 空间是 X 空间的子空间, 所以有 $\delta_X^\alpha(\varepsilon) \leq \delta_H^\alpha(\varepsilon) = 1 - (1 - \alpha(1 - \alpha)\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$ [8], 故

$$(\|x\| - \|y\|)^2 \leq 2\delta_X^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right) \leq 2\delta_H^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right) =$$

$$2\left(1 - \left(1 - \alpha(1 - \alpha)\frac{\|x - y\|^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \leq$$

$$2\left(1 - \left(1 - \alpha(1 - \alpha)\frac{\|x - y\|^2}{4}\right)\right) \leq$$

$$2\left(1 - \left(1 - \frac{\|x - y\|^2}{16}\right)\right) =$$

$$\frac{\|x - y\|^2}{8},$$

所以 $\|x\| - \|y\| \leq \frac{\|x - y\|}{2\sqrt{2}}$ 。

令 $z = x \frac{\|y\|}{x}$, 则

$$\|y - z\| \geq \|x - y\| - \|x - z\| = \|x - y\| - (\|x\| - \|y\|) \geq \frac{(2\sqrt{2} - 1)\|x - y\|}{2\sqrt{2}},$$

根据广义凸性模是非降函数 [8] 和命题 1, 故

$$\delta_X^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2\|y\|}\right) \leq \delta_X^\alpha\left(\frac{\|y - z\|}{\|y\|}\right) \leq 2(1 - \alpha)\delta_X$$

$$\left(\frac{\|y - z\|}{\|y\|}\right) < 2\left(1 - \frac{\|y + z\|}{2\|y\|}\right)$$

$$\|x + y\| \leq \|x - z\| + \|y + z\| < \|x\| - \|y\| + 2$$

$$\|y\| - \delta_X^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2\|y\|}\right)\|y\|,$$

因为 $\frac{\delta_X^\alpha(\varepsilon)}{\varepsilon}$ 是非降函数以及 $\|y\| \leq 1$, 所以有

$$\delta_X^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2\|y\|}\right) \frac{2\|y\|}{\|x - y\|} \geq \delta_X^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right) \frac{2}{\|x - y\|} \Rightarrow$$

$$\delta_X^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2\|y\|}\right)\|y\| \geq \delta_X^\alpha\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right),$$

因此

$$\begin{aligned}
& \|x+y\|^2 < \\
& \left(\|x\| + \|y\| - \delta_X^\alpha \left(\frac{\|x-y\|}{2\|y\|} \right) \|y\| \right)^2 \leq \\
& \left(\|x\| + \|y\| - \delta_X^\alpha \left(\frac{\|x-y\|}{2} \right) \right)^2 \leq \\
& 4 \left(1 - \frac{1}{2} \delta_X^\alpha \left(\frac{\|x-y\|}{2} \right) \right)^2 \leq \\
& 4 - 2\delta_X^\alpha \left(\frac{\|x-y\|}{2} \right),
\end{aligned}$$

因此对任意的 $x, y \in X$, 若 $\|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$, 则

$$\|x+y\|^2 < 4 - 2\delta_X^\alpha \left(\frac{\|x-y\|}{2} \right) \text{ 成立}。$$

参考文献:

- [1] 赵亮, 张兴. Banach 空间中的广义光滑模 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2016, 21(4): 112.
ZHAO Liang, ZHANG Xing. Generalized Modulus of Smoothness in Banach Spaces [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2016, 21(4): 112.
- [2] 崔云安, 左占飞. 广义凸性模在不动点中的应用 [J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2009, 4(2): 206.
CUI Yunan, ZUO Zhanfei. The Application of Generalized Convex Modules in Fixed points [J]. Journal of Natural Science of Heilongjiang University, 2009, 4(2): 206.
- [3] 崔云安. Banach 空间几何理论及应用 [M]. 北京, 科学出版社, 2001: 33.
CUI Yunan. Geometric Theory and Application of Banach Space [M]. Beijing, Science Press, 2001: 33.
- [4] 赵亮, 王薇薇, 张兴. Banach 空间具有正规结构的判定 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2018, 23(4): 142.
ZHAO Liang, WANG Weiwei, ZHANG Xing. The Determination of Banach Space with Normal Structure [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2018, 23(4): 142.
- [5] GAO J. On Some Geometric Parameters in Banach Spaces [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 334: 114.
- [6] 王丰辉. Banach 空间的模与常数及其在不动点理论中的应用 [J]. 新乡: 河南师范大学, 2006.
- [7] 赵亮, 崔云安. Musielak-Orlicz 序列空间的非方常数 [J]. 哈尔滨商业大学学报, 2006, 2(3): 112.
ZHAO Liang, CUI Yunan. The Non Square Constant of Musielak-Orlicz Sequence Space [J]. Journal of Harbin University of Commerce, 2006, 2(3): 112.
- [8] BARONTI M, PAPINI P L. Convexity, Smoothness and Moduli [J]. Nonlinear Analysis, 2009(70): 2457.
- [9] DANES J. On Local and Global Moduli of Convexity [J]. Comment. Math. Univ. Carolinae, 1976(67): 413.
- [10] BYNUM W L. Normal Structure Coefficients for Banach Spaces [J]. Pacific J. Math, 1980(86): 427.
- [11] YANG C, WANG F. On a Generalized Modulus of Convexity [J]. Acta. Math. Sci, 2007, 27B(4): 838.
- [12] SAEJUNG S. Sufficient Conditions for Uniform Normal Structure of Banach Spaces and Their Dualspaces [J]. J. Math. Anal. Appl, 2007(330): 597.
- [13] SAEJUNG S. Characteristic of Convexity of a Banach Space and Normal Structure [J]. J. Math. Anal. Appl, 2008(337): 123.
- [14] BANASS J. On Moduli of Smoothness of Banach Spaces [J]. Bull. Pol. Acad. Sci. Math, 1986(34): 287.
- [15] 杨长森, 赵俊峰. 凸性模估计定理的推广 [J]. 数学学报, 1998, 4(1): 81.
YANG Changsen, ZHAO Junfeng. A Generalization of the Convex Module Estimation Theorem [J]. Acta Mathematica Sinica, 1998, 4(1): 81.
- [16] 杨长森, 左红亮. Hahn-Banach 定理在凸性模定义中的应用 [J]. 数学物理学报, 2001, 21(1): 133.
YANG Changsen, ZUO Hongliang. The Application of Hahn-Banach Theorem in the Definition of Convex Modules [J]. Acta of Mathematical Physics, 2001, 21(1): 133.
- [17] 郑亚男. 广义高继常数与广义光滑模的一些性质 [J]. 河南师范大学学报, 2011, 4(2): 12.
ZHENG Yanan. Some Properties of Generalized High Heritability and Generalized Smooth Modules [J]. Journal of Henan Normal University, 2011, 4(2): 12.
- [18] 杜世维. Banach 空间的几何常数在不动点中的应用 [J]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2011: 26.
- [19] GAO J. Normal Structure and Smoothness in Banach Spaces [J]. Nonlinear Funct. Anal. Appl, 2005, 10(1): 103.
- [20] 崔云安, 张帆, 张晓月. Banach 空间的凸性模与正规结构 [J]. 哈尔滨理工大学学报, 2009, 2(1): 26.
CUI Yunan, ZHANG Fan, ZHANG Xiaoyue. Convex Modules and Normal Structures of Banach Spaces [J]. Journal of Harbin University of Science and Technology, 2009, 2(1): 26.

(编辑: 温泽宇)